

ЗАДАЧИ 1 ТУРА
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ТУРНИРА «ШАГ В МАТЕМАТИКУ»

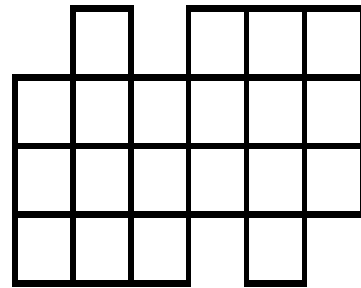
24 марта 2021 года

Задача №1

На столе в ряд лежат монеты. Среди них обязательно есть настоящие, так и фальшивые (которые легче настоящих). Известно, что любая настоящая монета лежит левее любой фальшивой. Как за одно взвешивание на чашечных весах без гирь определить тип каждой монеты, лежащей на столе?

Задача №2

Можно ли фигуру, изображенную на рисунке, разрезать на 4 равные части, проводя разрезы только по границам клеток?



Задача №3

Саша купил в магазине карандаши по 13 рублей за штуку и ручки по 20 рублей за каждую, всего он заплатил 350 рублей. Сколько всего штук карандашей и ручек приобрёл Саша?

Задача №4

В клетках квадратной таблицы 3×3 расставлены знаки «+» и «-», как показано на рис. Разрешается сменить в какой-либо строчке или каком-нибудь столбике все знаки на противоположные. Можно ли с помощью таких операций получить таблицу, изображенную на рис. 2? Ответ обоснуйте.

+	+	-
-	-	+
-	+	-

Рис. 1.

-	+	+
+	+	-
-	+	-

Рис. 2.

ЗАДАЧИ 2 ТУРА
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ТУРНИРА «ШАГ В МАТЕМАТИКУ»

24 марта 2021 года

Задача №1

Сумму цифр шестизначного числа умножили на произведение его цифр. Получилось 390. Найдите хотя бы одно такое шестизначное число.

Задача №2

Улитка в течение 9 минут часть времени ползет, часть отдыхает. За каждые отдельно взятые 2 минуты подряд, она проползла 20 см. Следует ли из этого, что за 9 минут она проползла 90 см? Ответ обосновать.

Задача №3

Путешественник посетил селение, в котором каждый человек либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Жители селения встали в круг, и каждый сказал путешественнику про соседа справа, правдив тот или лжив. На основании этих сообщений путешественник однозначно определил, какую долю от всех жителей селения составляют правдивые. Определите и вы, чему она равна.

Задачи №4

Имеет ли решение ребус (одинаковые буквы заменяются равными цифрами, разные буквы — разными цифрами, звездочки заменяются на любые цифры):

$$\begin{array}{r} + \quad \text{А} \quad * \quad \text{В} \quad * \quad \text{В} \\ \quad \text{В} \quad * \quad \text{В} \quad * \quad \text{А} \\ \hline \quad \text{7} \quad \text{9} \quad \text{7} \quad \text{9} \quad \text{7} \end{array}$$

ОТВЕТЫ 1 ТУРА «ШАГ В МАТЕМАТИКУ»

Задача №1

На столе в ряд лежат монеты. Среди них обязательно есть настоящие, так и фальшивые (которые легче настоящих). Известно, что любая настоящая монета лежит левее любой фальшивой. Как за одно взвешивание на чашечных весах без гирь определить тип каждой монеты, лежащей на столе?

Решение:

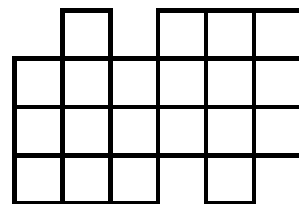
Пронумеруем монеты слева направо. Так как среди монет есть обязательно настоящая и фальшивая, то первая монета настоящая, а четвертая – фальшивая. Необходимо определить вид второй и третьей монет. Настоящие монеты лежат левее фальшивых, значит возможны следующие случаи: 1) настоящая, настоящая, настоящая, фальшивая; 2) настоящая, настоящая, фальшивая, фальшивая; 3) настоящая, фальшивая, фальшивая, фальшивая.

Положим на левую чашу весов первую и четвертую монеты, а на правую чашу весов – вторую и третью монеты.

- 1) Если правая чаша перевесила, то на ней лежат только настоящие монеты, т.е. вторая и третья монеты – настоящие.
- 2) Если весы находятся в равновесии, то на каждой чаше лежат настоящая и фальшивая монеты, т.е. вторая монета – настоящая, а третья – фальшивая.
- 3) Если левая чаша перевесила, то на правой чаше лежат только фальшивые монеты, т.е. вторая и третья монеты – фальшивые.

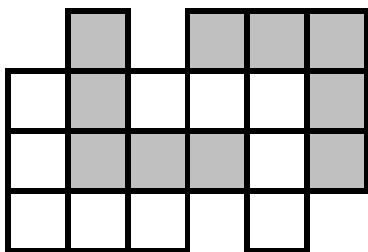
Задача №2

Можно ли фигуру, изображенную на рисунке, разрезать на 4 равные части, проводя разрезы только по границам клеток?



Ответ: можно.

Один из вариантов решения показан на рисунке:



Принимается решение любым другим способом.

Задача №3

Саша купил в магазине карандаши по 13 рублей за штуку и ручки по 20 рублей за каждую, всего он заплатил 355 рублей. Сколько всего штук карандашей и ручек приобрёл Саша?

Решение:

Пусть x – количество карандашей, y – количество ручек.

Получим уравнение $13x + 20y = 355$ упростим $13x + 13y + 7y = 355$ ($20y = 13y + 7y$)

$$13(x+y) + 7y = 355,$$

обозначим $x+y=t$ (1), подставим в предыдущее уравнение

$$13t + 7y = 355 \quad (13t = 6t + 7t), \text{ тогда } 7(t+y) + 6t = 355,$$

обозначим $t+y=k$ (2) $7k + 6t = 355$ ($7k = 6k + 1k$), тогда $6(k+t) + k = 355$,

обозначим $k+t=n$ (3) $6n + k = 355$, отсюда $k = 355 - 6n$.

Подставим в (3), получим $355 - 6n + t = n$, отсюда $t = 7n - 355$

Подставим в (2) $k = 355 - 6n$ и $t = 7n - 355$, получим $7n - 355 + y = 355 - 6n$, отсюда $y = 710 - 13n$ Подставим в (1) $y = 710 - 13n$ и $t = 7n - 355$, получим $x + 710 - 13n = 7n - 355$,

отсюда $x = 20n - 1065$, при $x=0$, $n=53,25$, но так как $x > 0$, $y > 0$ целые натуральные числа, значит $n=54$, тогда $x = 20 \cdot 54 - 1065$, $x=15$, значит $y=8$.

Ответ: 15 карандашей и 8 ручек, всего 23 штуки.

Задача №4

В клетках квадратной таблицы 3×3 расставлены знаки «+» и «-», как показано на рис. 1. Разрешается сменить в какой-либо строчке или каком-нибудь столбике все знаки на противоположные. Можно ли с помощью таких операций получить таблицу, изображенную на рис. 2? Ответ обоснуйте.

+	+	-
-	-	+
-	+	-

Рис. 1.

-	+	+
+	+	-
-	+	-

Рис. 2.

Ответ:

Нет, нельзя. Указание. В любом квадрате 2×2 таблицы при таких операциях сохраняется четность числа знаков. Заметим, что квадраты 2×2 в левых верхних углах таблиц содержат знаки, числа которых различны по четности.

ОТВЕТЫ 2 ТУРА «ШАГ В МАТЕМАТИКУ»

Задача №1

Сумму цифр шестизначного числа умножили на произведение его цифр. Получилось 390. Найдите хотя бы одно такое шестизначное число.

Решение: Разложим полученное число на множители. $390 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$. Тогда, явным кандидатом на роль суммы цифр является простое число 13. И действительно, $13 = 2 + 3 + 5 + 1 + 1 + 1$. Поэтому подойдет любое шестизначное число, в записи которого есть по одной двойке, тройке и пятерке и три единицы, например, **111235**.

Примечание: в качестве ответа нужно указать одно число, состоящее из указанных цифр.

Задача №2

Улитка в течение 9 минут часть времени ползет, часть отдыхает. За каждые отдельно взятые 2 минуты подряд, она проползла 20 см. Следует ли из этого, что за 9 минут она проползла 90 см?

Ответ обосновать.

Ответ: не следует.

Например, пусть улитка каждое нечетное число минут стоит, а каждые четное число минут ползет со скоростью 20 см в минуту.

Тогда за каждый участок времени длительностью в 2 минуты улитка проползает по 20 см, но за 9 минут проползет 80 см.

Задача №3

Путешественник посетил селение, в котором каждый человек либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Жители селения встали в круг, и каждый сказал путешественнику про соседа справа, правдив тот или лжив. На основании этих сообщений путешественник однозначно определил, какую долю от всех жителей селения составляют правдивые. Определите и вы, чему она равна.

Решение:

Пусть x - доля правдивых жителей. Рассмотрим другой круг, в котором все лжецы станут правдивыми, а все правдивые - лжецами; в нем доля правдивых равна $1 - x$. В этом круге путешественник услышит то же самое, поскольку правдивость любого жителя изменилась, но изменилась и правдивость соседа,

о котором он говорит. Поскольку путешественник сумел на основании полученных ответов найти долю правдивых жителей, эта доля в обоих кругах одинакова. Следовательно, она равна $1/2$.

Задачи №4

Имеет ли решение ребус (одинаковые буквы заменяются равными цифрами, разные буквы — разными цифрами, звездочки заменяются на любые цифры):

$$\begin{array}{r} + \quad \text{А} \quad * \quad \text{Б} \quad * \quad \text{В} \\ \quad \text{В} \quad * \quad \text{Б} \quad * \quad \text{А} \\ \hline \quad 7 \quad 9 \quad 7 \quad 9 \quad 7 \end{array}$$

Ответ: не имеет.

Решение: Сумма разрядов единиц $\text{А} + \text{В}$ оканчивается на 7, а сумма разрядов десятков тысяч $\text{А} + \text{В}$ однозначна. Значит, $\text{А} + \text{В} = 7$.

Тогда, сумма разрядов десятков равна 9, так как не может быть равной 19, поэтому при этом разряд не переносился. Но тогда сумма $\text{Б} + \text{Б}$ оканчивается на 7, что невозможно.

Принимается решение любым способом с обоснованием.